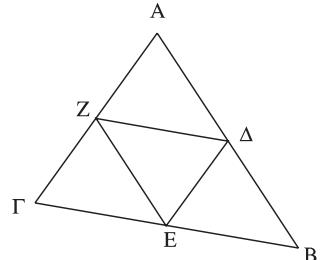


Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) Επειδή τα Z , Δ , E είναι μέσα των πλευρών τριγώνου είναι $Z\Delta \parallel GE$ και $\Delta E \parallel ZG$. Άρα το τετράπλευρο $Z\Delta EG$ είναι παραλληλόγραμμο. Η διαγώνιος ZE του παραλληλόγραμμου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. Άρα $(\Delta EZ) = (ZGE)$.



β) Έχουμε $(\Delta EZ) = (ZGE)$ από το παραλληλόγραμμο $Z\Delta EG$, $(\Delta EZ) = (\Delta EB)$ από το παραλληλόγραμμο $Z\Delta BE$ και $(\Delta EZ) = (AZ\Delta)$ από το παραλληλόγραμμο $AZE\Delta$. Άρα $(\Delta EZ) = (\Delta EB) = (ZGE) = (AZ\Delta)$. Επομένως $(AB\Gamma) = 4(\Delta EZ)$ ή $(\Delta EZ) = \frac{1}{4}(AB\Gamma)$.

2. Θα δείξουμε ότι $(AB\Gamma\Delta) = A\Gamma \frac{\Delta E + BZ}{2}$. Πράγματι είναι:

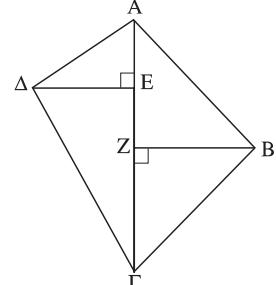
$$(A\Delta\Gamma) = \frac{A\Gamma \cdot \Delta E}{2}$$

$$(AB\Gamma) = \frac{A\Gamma \cdot BZ}{2}$$

$$\text{Επομένως } (A\Delta\Gamma) + (AB\Gamma) = \frac{A\Gamma \cdot \Delta E}{2} + \frac{A\Gamma \cdot BZ}{2} \text{ ή}$$

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{A\Gamma \cdot \Delta E + A\Gamma \cdot BZ}{2} = \frac{A\Gamma(\Delta E + BZ)}{2}$$

$$(AB\Gamma\Delta) = A\Gamma \frac{\Delta E + BZ}{2}$$



3. α) $(AO\Delta) = \frac{1}{2} OA \cdot O\Delta \cdot \eta \mu 30^\circ = \frac{1}{2} OA \cdot O\Delta \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} OA \cdot O\Delta$

β) Έχουμε: $(AO\Delta) = \frac{1}{4} OA \cdot O\Delta$

Όμοια έχουμε: $(\Gamma OB) = \frac{1}{4} O\Gamma \cdot OB$

$(\Delta OG) = \frac{1}{4} O\Delta \cdot OG$

$(AOB) = \frac{1}{4} OA \cdot OB$

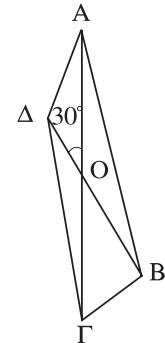
Άρα: $(AO\Delta) + (\Gamma OB) + (\Delta OG) + (AOB) =$

$$\frac{1}{4} (OA \cdot O\Delta + O\Gamma \cdot OB + O\Delta \cdot OG + OA \cdot OB) =$$

$$\frac{1}{4} [OA(O\Delta + OB) + O\Gamma(OB + O\Delta)] =$$

$$\frac{1}{4} (OA \cdot B\Delta + O\Gamma \cdot B\Delta) = \frac{1}{4} [(B\Delta(OA + O\Gamma)] = \frac{1}{4} B\Delta \cdot A\Gamma$$

$$(AB\Gamma\Delta) = (AO\Delta) + (\Gamma OB) + (\Delta OG) + (AOB) = \frac{1}{4} A\Gamma \cdot B\Delta$$



4. Είναι $(AB\Delta) = (B\Gamma\Delta)$ (1)

από το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$

$$(KE\Delta) = (EH\Delta) \quad (2)$$

από το παραλληλόγραμμο $KEH\Delta$

$$(BZE) = (B\Lambda E) \quad (3)$$

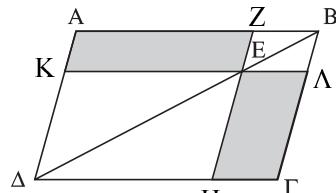
από το παραλληλόγραμμο $ZB\Lambda E$

Αφαιρούμε τις ισότητες (2) και (3) από την (1) και έχουμε:

$$(AB\Delta) - (KE\Delta) - (BZE) = (B\Gamma\Delta) - (EH\Delta) - (B\Lambda E)$$

$$(AKEZ) = (E\Lambda GH)$$

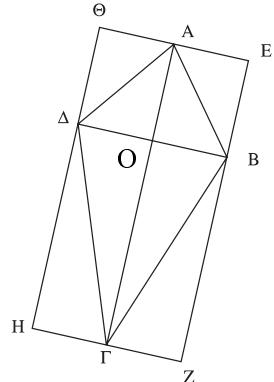
Από ίσα αφαιρέσαμε ίσα και έμειναν ίσα.



5. Θα δείξουμε ότι $(HZE\Theta) = 2 (AB\Gamma\Delta)$.

Πράγματι, από τα σχηματιζόμενα παραλληλόγραμμα ΔEBO , ΔAOD , ΔOGH και ΔZBO έχουμε ότι $(A\Theta\Delta) = (AO\Delta)$, $(AEB) = (AOB)$, $(\Delta OG) = (\Delta HG)$ και $(GOB) = (BZG)$. Επομένως:

$$\begin{aligned} (HZE\Theta) &= (A\Theta\Delta) + (AO\Delta) + (AEB) + (AOB) + \\ &\quad (\Delta OG) + (\Delta HG) + (GOB) + (BZG) = \\ 2(AO\Delta) &+ 2(AOB) + 2(\Delta OG) + 2(GOB) = \\ 2[(AO\Delta) &+ (AOB) + (\Delta OG) + (GOB)] = 2(AB\Gamma\Delta) \end{aligned}$$



6. Από την εκφώνηση έχουμε ότι $E = \frac{\delta_1 \alpha}{2}$. Όμως ξέρουμε ότι το εμβαδό του

$$\text{ρόμβου δίνεται από τη σχέση } E = \frac{\delta_1 \delta_2}{2}. \text{ Άρα } \frac{\delta_1 \alpha}{2} = \frac{\delta_1 \delta_2}{2} \text{ ή } \alpha = \delta_2. \text{ Επει-$$

δή λοιπόν καταλήξαμε ότι η μία διαγώνιος του ρόμβου θα ισούται με την πλευρά του και επειδή οι διαδοχικές πλευρές του ρόμβου είναι ίσες, η διαγώνιος αυτή λοιπόν θα χωρίζει το ρόμβο σε δύο ίσα ισόπλευρα τρίγωνα. Άρα υποχρεωτικά τότε η μία γωνία του ρόμβου θα είναι 60° .

7. Ξέρουμε ότι το εμβαδό τριγώνου δίνεται από τη σχέση $E = \frac{1}{2} \alpha v_\alpha$. Όμως

$$\text{σύμφωνα με την εκφώνηση είναι } E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \mu_\alpha. \text{ Άρα } \frac{1}{2} \alpha \cdot \mu_\alpha = \frac{1}{2} \alpha \cdot v_\alpha \text{ ή } \mu_\alpha = v_\alpha.$$

Για να συμβαίνει όμως αυτή η σχέση ότι δηλαδή η διάμεσος του τριγώνου που αντιστοιχεί στην πλευρά α να ισούται με το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά α , πρέπει το τρίγωνο να είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο.

8. Ξέρουμε ότι το εμβαδό τριγώνου δίνεται από τη σχέση $E = \frac{1}{2}a \cdot v_a$. Όμως,

σύμφωνα με την εκφώνηση, είναι $E = \frac{1}{2}a \cdot \delta_a$. Άρα $\frac{1}{2}a \cdot \delta_a = \frac{1}{2}a \cdot v_a$ ή $\delta_a = v_a$.

Για να συμβαίνει όμως αυτή η σχέση ότι δηλαδή η διχοτόμος της γωνίας που αντιστοιχεί στην πλευρά a να ισούται με το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά a , πρέπει το τρίγωνο να είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο.

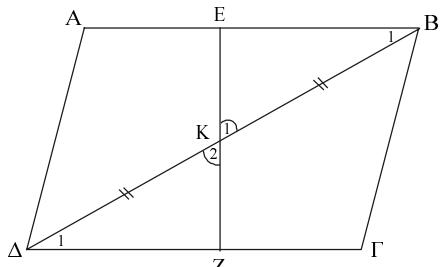
9. Η περίμετρος τετραγώνου πλευράς a είναι $4a$ και το εμβαδό του είναι a^2 . Η περίμετρος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς β είναι 3β . Σύμφωνα με την εκφώνηση έχουμε ότι $4a = 3\beta$ ή $a = \frac{3\beta}{4}$. Επομένως το εμβαδό του τετραγώνου

με πλευρά $a = \frac{3\beta}{4}$ θα είναι $E = a^2 = \left(\frac{3\beta}{4}\right)^2 = \frac{9\beta^2}{16}$.

10. Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα KEB

και $K\Delta Z$ είναι ίσα γιατί $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ ως κατακορυφή, $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ και $KB = K\Delta$.

Άρα $EB = \Delta Z$.



Όμως επειδή $AB = \Delta Z$ θα έχουμε ότι $AB - EB = \Delta Z - \Delta Z$ ή $AE = ZG$. Τα τραπέζια λοιπόν $AEZ\Delta$ και $EBGZ$ είναι ισοδύναμα, αφού έχουν ίσα ύψη και ίσο ημιάθροισμα βάσεων.

Δηλαδή: $\frac{AE + \Delta Z}{2} v = \frac{EB + ZG}{2} v$ ή $(AEZ\Delta) = (BGZE)$.

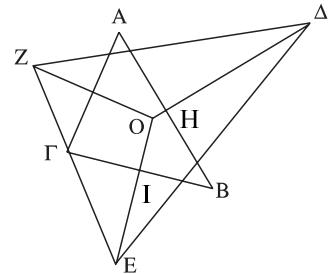
11. α) $(\Delta O E) = \frac{1}{2} O \Delta \cdot O E \cdot \eta \mu E \hat{\Delta} =$

$$\frac{1}{2} A B \cdot B \Gamma \cdot \eta \mu B = (A B \Gamma)$$

$\eta \mu E \hat{\Delta} = \eta \mu B$ γιατί το τετράπλευρο OHBI είναι εγγράψιμο, αφού έχει $\hat{I} = \hat{H} = 90^\circ$.

β) Όμως βρίσκουμε ότι $(Z O \Delta) = (A B \Gamma)$ και $(Z O E) = (A B \Gamma)$.

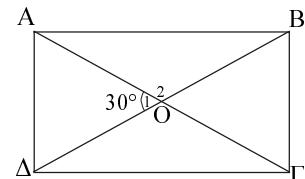
Άρα $(\Delta O E) + (Z O E) + (Z O \Delta) = 3 (A B \Gamma)$.



12. Είναι $(A B \Gamma \Delta) = \frac{A \Gamma^2}{4}$.

Όμως $(A O \Delta) = \frac{1}{2} O A \cdot O \Delta \cdot \eta \mu O_1$ και

$$(A O B) = \frac{1}{2} O A \cdot O B \cdot \eta \mu O_2$$



Τα τρίγωνα αυτά είναι ισεμβαδικά γιατί $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ$.

Άρα $(A B \Gamma \Delta) = 4 (A O \Delta)$

$$4 (A O \Delta) = \frac{A \Gamma^2}{4} \quad \& \quad 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{A \Gamma}{2} \cdot \frac{A \Gamma}{2} \cdot \eta \mu O_1 = \frac{A \Gamma^2}{4} \quad \&$$

$$\frac{A \Gamma^2}{2} \cdot \eta \mu O_1 = \frac{A \Gamma^2}{4} \quad \& \quad \eta \mu O_1 = \frac{1}{2} \quad \& \quad \hat{O}_1 = 30^\circ$$

13. Το εμβαδό τετραγώνου πλευράς α είναι $E = \alpha^2$. Εδώ είναι $\alpha^2 = 256 \text{ cm}^2$ ή $\alpha = 16 \text{ cm}$. Αν ελαττώσουμε την πλευρά α κατά 10 cm , τότε γίνεται 6 cm η πλευρά και το εμβαδό τότε του τετραγώνου γίνεται $E' = 36 \text{ cm}^2$.

Άρα $\Delta E = E - E' = 256 - 36 = 220 \text{ cm}^2$.

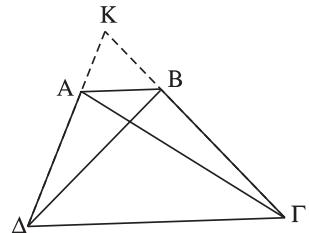
14. Είναι: $(\Gamma AB) = \frac{AB \cdot v}{2}$, $(\Delta AB) = \frac{AB \cdot v}{2}$.

$$\text{Άρα } (\Gamma AB) = (\Delta AB)$$

$$(\text{ΚΑΓ}) = (\text{KAB}) + (\text{ΓΑΒ})$$

$$(\text{ΚΔΒ}) = (\text{KAB}) + (\text{ΔΑΒ})$$

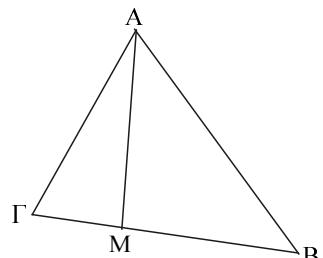
$$\text{Άρα } (\text{ΚΑΓ}) = (\text{ΚΔΒ}).$$



15. Θα δείξουμε ότι $(\text{ABM}) = \frac{2}{3} (\text{ABΓ})$.

$$\text{Πράγματι: } (\text{ABM}) = \frac{1}{2} MB \cdot v = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} BG \cdot v =$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} BG \cdot v \right) = \frac{2}{3} (\text{ABΓ})$$



16. Το ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ και το τρίγωνο ΚΛΜ με γωνία $K = 120^\circ$ έχουν γωνίες παραπληρωματικές.

$$\text{Επομένως } \frac{(\text{ΚΛΜ})}{(\text{ABΓ})} = \frac{\text{ΚΛ} \cdot \text{ΛΜ}}{\text{AB} \cdot \text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΚΛ} \cdot \text{ΛΜ}}{\alpha \cdot \alpha} = \frac{\text{ΚΛ} \cdot \text{ΛΜ}}{\alpha^2}$$

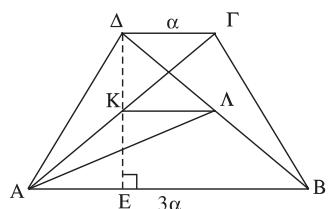
17. α) Είναι γνωστό ότι:

$$KL = \frac{AB - AG}{2} = \frac{3\alpha - \alpha}{2} = \alpha$$

$$\text{Άρα } (\text{AKL}) = \frac{KL \cdot KE}{2} = \frac{\alpha \cdot \alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$$

$AE = \alpha$, άρα ΔGEA παραλληλόγραμμο,

$$\text{άρα } KE = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$



β) Από το τραπέζιο ΚΛΒΑ προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΑΚΛ και ΒΚΛ έχουν κοινή βάση ΚΛ και κοινό ύψος ΚΕ = α. Άρα $(ΑΚΛ) = (ΒΚΛ)$. Όμοια, από το τραπέζιο ΚΛΓΔ έχουμε ότι $(ΓΚΛ) = (ΔΚΛ)$, αφού έχουν κοινή βάση ΓΔ = α και κοινό ύψος ΚΔ = α.

18. Έστω α η πλευρά του τετραγώνου. Τότε το εμβαδό του είναι α^2 . Αν η πλευρά του τετραγώνου αυξηθεί κατά 4 m, τότε:
 $E' = (\alpha + 4)^2 \quad \text{ή} \quad E + 136 = (\alpha + 4)^2 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 + 136 = \alpha^2 + 8\alpha + 16 \quad \text{ή} \quad 8\alpha = 136 - 16 \quad \text{ή} \quad 8\alpha = 120 \quad \text{ή} \quad \alpha = 15 \text{ m}$

19. Επειδή η περίμετρος του ρόμβου είναι 48 cm τότε $48 = 4\alpha$, όπου α είναι η πλευρά του ρόμβου. Άρα $\alpha = 12 \text{ cm}$. Όμως ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο και αφού η πλευρά του είναι α και το ύψος του είναι 5 cm, τότε το εμβαδό του είναι $12 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^2$.

20. Έστω Ε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

$$\text{Tότε } E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \beta \cdot \mu \Gamma = \frac{1}{2} 12 \cdot 3 \cdot \mu 60^\circ = \frac{1}{2} 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Επομένως το εμβαδό του ισοπλεύρου τριγώνου θα είναι:

$$\frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \alpha^2 = 36 \quad \text{ή} \quad \alpha = 6 \text{ cm.}$$

21. Είναι:

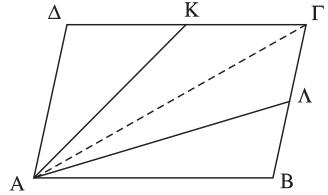
$$(\Gamma A \Delta) = \frac{1}{2} (AB\Gamma\Delta) \text{ και } (AK\Gamma) = \frac{1}{2} (\Gamma A \Delta) =$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} (AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{4} (AB\Gamma\Delta).$$

$$\text{Όμοια } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} (AB\Gamma\Delta) \text{ και } (A\Lambda\Gamma) = \frac{1}{2} (AB\Gamma) =$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} (AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{4} (AB\Gamma\Delta)$$

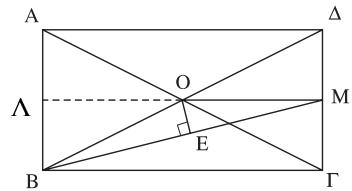
$$\text{Άρα } (AK\Gamma\Lambda) = (AK\Gamma) + (A\Lambda\Gamma) = \frac{1}{4} (AB\Gamma\Delta) + \frac{1}{4} (AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} (AB\Gamma\Delta)$$



22. α) Εστω $B\Gamma = \beta$ και $AB = \alpha$.

$$\text{Είναι } OM = \frac{\beta}{2}$$

$$OB = \frac{B\Delta}{2} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$$



Από το ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma M$ έχουμε:

$$BM^2 = B\Gamma^2 + \Gamma M^2 \quad \text{ή} \quad BM^2 = \beta^2 + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{4\beta^2 + \alpha^2}{4}$$

$$BM = \frac{1}{2} \sqrt{4\beta^2 + \alpha^2}$$

$$\beta) (OBM) = \frac{OM \cdot BA}{2} = \frac{\frac{\beta}{2} \cdot \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{\alpha\beta}{8} \quad (1)$$

$$(OGM) = \frac{OM \cdot MG}{2} = \frac{\frac{\beta}{2} \cdot \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{\alpha\beta}{8}. \quad \text{Άρα } (OBM) = (OMG).$$

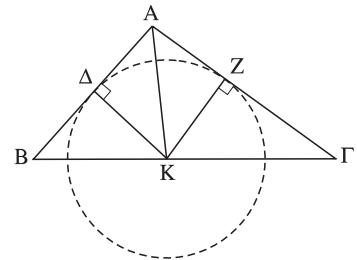
γ) Είναι η σχέση (1).

23. Έστω E το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

$$\text{Τότε: } (AB\Gamma) = (AKB) + (AK\Gamma)$$

$$E = \frac{\gamma R}{2} + \frac{\beta R}{2} \quad (\text{AB} = \gamma, \text{AG} = \beta)$$

$$2E = (\beta + \gamma) R$$



24. Είναι: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, $\hat{\Gamma}_1 = \hat{B}_1$, $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

$$\text{Αρα: } A\hat{\Gamma}\Gamma' \approx A\hat{B}B'$$

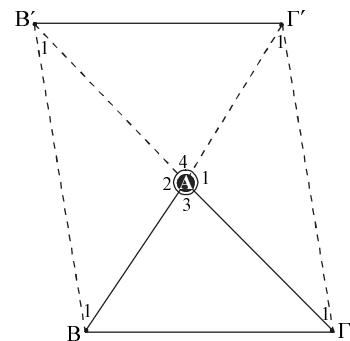
Από την ομοιότητα των τριγώνων $A\hat{\Gamma}\Gamma'$ και

$$A\hat{B}B' \text{ έχουμε: } \frac{A\Gamma}{AB'} = \frac{A\Gamma'}{AB} \quad (1)$$

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB'\Gamma'$ έχουν μια γωνία

$$\text{ίση, } \hat{A}_3 = \hat{A}_4. \text{ Επομένως } \frac{(AB\Gamma)}{(AB'\Gamma')} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{AB' \cdot A\Gamma'} \stackrel{(1)}{=} 1$$

Αρα $(AB\Gamma) = (AB'\Gamma')$.



25. $B\hat{K}\Gamma = 360^\circ - (A\hat{K}B + A\hat{K}\Gamma) =$

$$360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$$

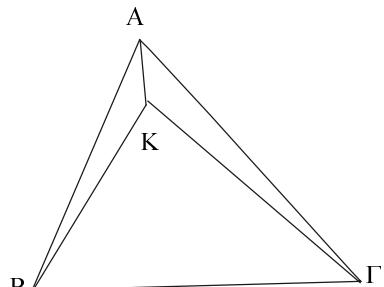
$$\alpha) (K\Gamma B) = \frac{1}{2} KB \cdot K\Gamma \cdot \eta\mu B\hat{K}\Gamma =$$

$$\frac{1}{2} 6 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\beta) (AKB) = \frac{1}{2} AK \cdot KB \cdot \eta\mu A\hat{K}B = \frac{1}{2} 2 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$(AK\Gamma) = \frac{1}{2} AK \cdot K\Gamma \cdot \eta\mu A\hat{K}\Gamma = \frac{1}{2} 2 \cdot 10 \cdot \eta\mu 120^\circ = \frac{1}{2} 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$(AB\Gamma) = (AKB) + (AK\Gamma) + (K\Gamma B) = 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = 23\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



26. α) Έστω $\alpha = 5$ cm η πλευρά του ρόμβου. Ισχύει: $\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta_2}{2}\right)^2 = 5^2$

(Πηθαγόρειο θεώρημα) ή $\delta_1^2 + \delta_2^2 = 100$. Αφού $(\delta_1 + \delta_2)^2 - 2\delta_1\delta_2 = 100$,

τότε έχουμε $\delta_1 + \delta_2 = 14$ cm, $\delta_1\delta_2 = 48$ cm². Όμως $E_{ρόμβου} = \frac{\delta_1\delta_2}{2} = 24$ cm²

β) $E = v \cdot \alpha$ ή $24 = v \cdot 5$. Άρα $v = 4,8$ cm.

27. α) $A \hat{v} \Delta = x$, τότε $\hat{A} = 5x$.

Άρα $\hat{\Delta} = 30^\circ$, $\hat{A} = 150^\circ$.

$$\text{Άρα } AM = v = \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

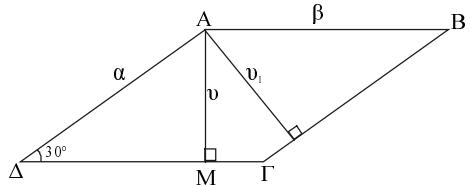
$$E = v\beta = \frac{\alpha\beta}{2} = 40 \quad (2)$$

$$\text{Όμως } 2(\alpha + \beta) = 12\alpha \quad (3)$$

$$\text{Από (2), (3) έχουμε } \beta = 20 \text{ cm}, \alpha = 4 \text{ cm} \quad (4)$$

β) Από (1), (4) έχουμε $v = 2$ cm. Όμως $E = v_1 \cdot \alpha = 40$ ή $v_1 \cdot 4 = 40$.

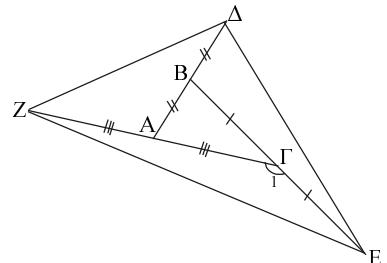
Άρα $v_1 = 10$ cm.



28. α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΓZE έχουν τις

γωνίες τους Γ και Γ_1 παραπληρωματι-

$$\text{κές. Άρα } \frac{(AB\Gamma)}{(\Gamma ZE)} = \frac{B\Gamma \cdot A\Gamma}{Z\Gamma \cdot \Gamma E} = \frac{1}{2} \quad (1)$$



β) Όμως

$$(\Delta BE) = 2 (\Delta ABG), (ZAG) = 2 (\Delta ABG) \quad (2)$$

$$(\Delta EZ) = (\Delta ABG) + (\Delta BE) + (\Gamma ZE) + (ZAG)$$

$$\text{Από όπου και λόγω των (1), (2) έχουμε } (\Delta EZ) = 7 (\Delta ABG).$$